泊松曲面重建的理论与实践

张晋

2023 年 1 月 5 日

目录

1 前言

本文主要介绍从点云到网格的泊松重建方法，其主要流程如下：

1. 准备点云数据。
2. 对点云数据进行处理，其中包含：点云下采样、去除离群点。
3. 对点云进行法向估计。
4. 使用泊松曲面重建将点云转换为隐式表达的曲面。
5. 将隐式曲面转换为网格。

2 泊松重建理论

泊松曲面重建 (Poisson Surface Reconstruction, PSR) 是 Lorensen 在 2006 年提出来的一种三维重建方法，其将点云转换为隐式表达的曲面，然后通过 Marching Cubes 等方法将隐式曲面转换为网格表示。

2.1 指示函数

和之前的很多工作一样，这里也使用了 3D 指示函数 (indicator function) 来表示曲面：

$$\chi_M(p) = \begin{cases} 1, & p \in M \\ 0, & p \notin M \end{cases} \tag{1}$$

当点 p 在曲面 M 内部时，$\chi_M(p) = 1$；当点 p 在曲面 M 外部时，$\chi_M(p) = 0$。那么我们只需要能拟合出 $\chi_M(p)$ 函数，就可以表示出曲面 M。

但是直接拟合 $\chi_M(p)$ 函数是非常困难的，因此作者提出拟合 $\chi_M(p)$ 的梯度场函数 $\nabla\chi_M$，由于 χ_M 在曲面内部和外部区域都是常数，所以 $\nabla\chi_M$ 在曲面内部和外部区域都是零向量，仅在曲面边界上有非零值。

另一方面，指示函数的梯度方向跟曲面的法线方向应该是一致的，也就是说我们需要最小化梯度场 $\nabla\chi$ 和法向量场 $\vec{V}$ 的差异，即最小化以下能量函数：

$$E(\chi) = \int_M \left\| \nabla\chi(p) - \vec{V}(p) \right\|^2 \mathrm{d}p \tag{2}$$

其中 $\vec{V}$ 表示点云的法向量场，如图 1所示。

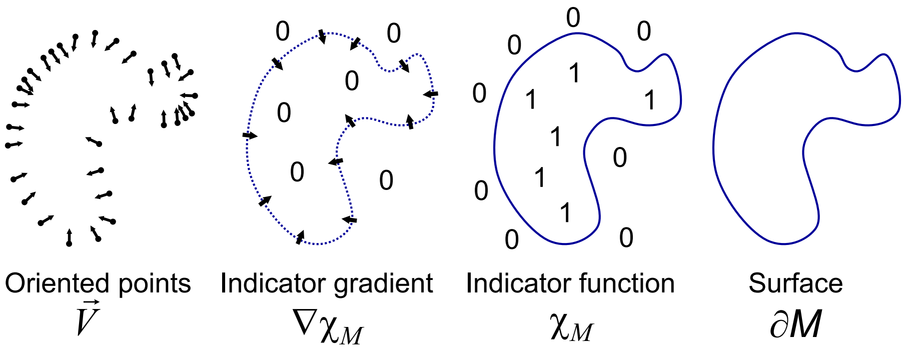


图 1: 指示函数的梯度方向应该跟曲面的法线方向是一致的。

2.2 定义梯度场

由于 χ_M 在曲面外到曲面上的过渡是突变的，如果严格计算 χ_M 的导数的话，那么其导数在曲面上的值为无穷大。为了避免这种情况，作者提出了一种定义梯度场的方法：即先对 χ_M 进行平滑处理，然后计算平滑后的 χ_M 的导数。这里的平滑处理使用了一个高斯滤波器，即：

$$\tilde{F}(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) \tag{3}$$

其中 σ 是一个参数，用来控制平滑程度。那么对于点 p，在其周围 q 处的高斯权重为：

$$\tilde{F}_p(q) = \tilde{F}(q-p) \tag{4}$$

对于点 p，使用高斯滤波器对 $\chi_M(p)$ 进行平滑后，其值为邻域点的高斯加权平均值：

$$\begin{aligned}(\chi_M * \tilde{F})(p) &= \int \tilde{F}(p-q)\chi_M(q)\mathrm{d}q \\ &= \int_M \tilde{F}_p(q)\mathrm{d}q\end{aligned} \tag{5}$$

平滑后的梯度场计算公式为：

$$\nabla\left(\chi_M * \tilde{F}\right)(q_0) = \int_{\partial M} \tilde{F}_p(q_0)\vec{N}_{\partial M}(p)\mathrm{d}p \tag{6}$$

其中 $\vec{N}_{\partial M}(p)$ 是点 $p \in \partial M$ 的法向，其方向指向曲面内部。Equation (6)的详细证明见附录 A。

2.3 近似梯度场

Equation (6)是一个连续的积分方程，这里作者使用法向量的离散采样来近似。对于输入点云数据 S，其中的每个元素 s 都有一个法向量 $s.\vec{N}$ 和一个点坐标 $s.p$。根据 s 将曲面

∂M 划分成不相交的局部区域 $\mathscr{P}_s$，然后积分方程可近似为：

$$
\begin{aligned}
\nabla\left(\chi_M * \tilde{F}\right)(q) &= \sum_{s\in S}\int_{\mathscr{P}_s}\tilde{F}_p(q)\vec{N}_{\partial M}(p)\mathrm{d}p \\
&\approx \sum_{s\in S}\int_{\mathscr{P}_s}\tilde{F}_{s.p}(q)\vec{N}_{\partial M}(s.p)\mathrm{d}s.p \\
&\approx \sum_{s\in S}|\mathscr{P}_s|\,\tilde{F}_{s.p}(q)s.\vec{N} \equiv \vec{V}(q)
\end{aligned} \tag{7}
$$

第二行用 $s.p$ 代替了 p，第三行用 $\mathscr{P}_s$ 的面积 $|\mathscr{P}_s|$ 代替了 $\mathrm{d}p$ 的积分。

当 S 为均匀分布的点云时，$|\mathscr{P}_s|$ 为固定的常数，可以忽略不计，此时有

$$
\vec{V}(q) \approx \sum_{s\in S}\tilde{F}_{s.p}(q)s.\vec{N} \tag{8}
$$

也就是将法向量场 $\vec{V}$ 近似为采样点 s 法向量的加权平均，如图 2所示。

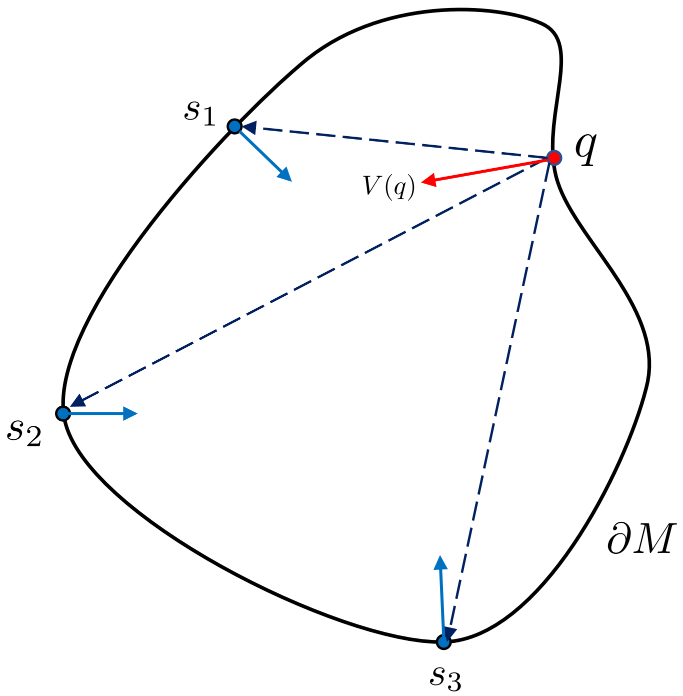


图 2: $\vec{V}(q)$ 可以近似表示成周围采样点法向 $s.\vec{N}$ 的高斯加权平均

2.4 求解泊松方程

经过上面的处理，我们得到了法向量场 $\vec{V}$ 的近似表达式，接下来我们希望最小化梯度场 $\nabla\chi$ 和法向量场 $\vec{V}$ 的差异，即最小化式 (2)的能量函数，但问题在于 $\vec{V}$ 并不是可积的，因

此转而最小化 $\nabla\cdot\vec{V}$ 和 $\nabla\cdot\nabla\chi=\Delta\chi$ 的差异，即：

$$\min_{\chi}\int_M\left(\nabla\cdot\vec{V}-\Delta\chi\right)^2\mathrm{d}p \tag{9}$$

2.5 自适应八叉树

在具体的实现时，为了减少计算量，需要使用自适应八叉树 (Adaptive Octree) 的数据结构。对于点集 S 和八叉树 $\mathscr{O}$，我们设定八叉树的最大深度为 D，然后可以构建自适应的划分，使得每个采样点 s 都落在深度为 D 的叶子节点中。

八叉树中的每一个节点 o 都是三维空间中的一个立方体，其中心位置为 $o.c$，边长为 $o.w$。对于每个节点 o，我们可以定义一个节点函数 F_o，使得

$$F_o(q)=F\left(\frac{q-o.c}{o.w}\right)\frac{1}{o.w^3} \tag{10}$$

这里 F 为标准高斯分布，也就是说 F_o 是一个以 $o.c$ 为中心，$o.w$ 为标准差的高斯分布。

此时，我们希望用一系列节点函数 $\{F_o\}$ 来表示向量场 $\vec{V}$，观察式(8)，我们知道向量场可近似表示为采样点法向的加权平均：

$$\vec{V}(q)\approx\sum_{s\in S}\tilde{F}_{s.p}(q)s.\vec{N} \tag{11}$$

在自适应八叉树数据结构中，我们知道 $s.p$ 会落在一个深度为 D 的叶子节点中，假设节点为 o，那么我们可以用节点的中心 $o.c$ 来近似代替 $s.p$，那么有

$$\begin{aligned}\vec{V}(q)&\approx\sum_{o\in\mathscr{O}}\tilde{F}_{o.c}(q)s.\vec{N}\\&=\sum_{o\in\mathscr{O}}\tilde{F}(q-o.c)s.\vec{N}\end{aligned} \tag{12}$$

由于滤波函数 $\tilde{F}$ 是对周围的网格进行卷积，其尺度也跟网格宽度一个级别，其标准差为 2^{-D}，即有

$$F(q)=\tilde{F}\left(\frac{q}{2^D}\right) \tag{13}$$

但是仅用网格中心代替采样点仍有不小误差，为了进一步提高精度，作者使用三线性插值来近似，即

$$\vec{V}(q)\equiv\sum_{s\in S}\sum_{o\in\mathrm{Ngbr}_D(s)}\alpha_{o,s}F_o(q)s.\vec{N} \tag{14}$$

这里 $\mathrm{Ngbr}_D(s)$ 是离 $s.p$ 最近的八个深度为 D 的邻居节点，$\alpha_{o,s}$ 是插值权重。

2.6 泊松方程的矩阵描述

在上面，我们已经将 $\vec{V}$ 用 F_o 来表示，接下来我们将 χ 也用 F_o 来表示：

$$\tilde{\chi} = \sum_{o} x_o F_o \tag{15}$$

这里的 x_o 是未知的系数。

我们要求解 $\nabla \cdot \vec{V} = \Delta\chi$，等价于求解 $\tilde{\chi}$ 最小化 $\nabla \cdot \vec{V}$ 和 $\Delta\chi$ 在 F_o 上投影的差异：

$$\sum_{o\in\mathscr{O}} \left\| \left\langle \Delta\tilde{\chi} - \nabla \cdot \vec{V}, F_o \right\rangle \right\|^2 = \sum_{o\in\mathscr{O}} \left\| \langle \Delta\tilde{\chi}, F_o \rangle - \left\langle \nabla \cdot \vec{V}, F_o \right\rangle \right\|^2. \tag{16}$$

我们将其转换为矩阵形式：

$$\min_{x\in\mathbb{R}^{|\sigma|}} \|Lx - v\|^2. \tag{17}$$

其中的 v 是一个 $|\mathscr{O}|$ 维的向量 v，其中第 o 个元素为 $v_o = \left\langle \nabla \cdot \vec{V}, F_o \right\rangle$。这里的 L 是一个 $|\mathscr{O}| \times |\mathscr{O}|$ 的矩阵，使得 Lx 的结果为 $\Delta\tilde{\chi}$ 在基函数 $\{F_o\}$ 上的投影。具体而言，L 矩阵的第 (o, o') 个元素的值为

$$L_{o,o'} \equiv \left\langle \frac{\partial^2 F_o}{\partial x^2}, F_{o'} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial^2 F_o}{\partial y^2}, F_{o'} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial^2 F_o}{\partial z^2}, F_{o'} \right\rangle. \tag{18}$$

注意这里的 L 是一个对称矩阵，因此原方程可以通过共轭梯度法求解。

2.7 表面提取

在求解泊松方程得到 $\tilde{\chi}$ 之后，我们需要将其转换为显示曲面，可以将 $\tilde{\chi}(q) = r$ 的点都提取出来，就得到了一个等值面：

$$\partial\tilde{M} \equiv \left\{ q \in \mathbb{R}^3 \mid \tilde{\chi}(q) = \gamma \right\} \quad \text{with} \quad \gamma = \frac{1}{|S|} \sum_{s\in S} \tilde{\chi}(s \cdot p) \tag{19}$$

这里的 r 取所有数据点的平均值，可以看到缩放 $\tilde{\chi}$ 并不会改变提取的表面。

在提取出等值面以后，就可以使用 Marching Cubes 等方法将等值面转换为显式网格。

2.8 非均匀情况

前面都是基于点云均匀分布的情况，对于非均匀的点云，作者提出了一个密度权重项：

$$W_{\hat{D}}(q) \equiv \sum_{s\in S} \sum_{o\in \mathrm{Ngbr}_{\hat{D}}(s)} \alpha_{o,S} F_o(q) \tag{20}$$

其中 $\hat{D} \leq D$ 是一个预先给定的深度，这里是计算 $\hat{D}$ 深度节点中的所有节点函数的三线性插值。

由于面积与采样密度成反比，所以法向量场可重新表示为:

$$\vec{V}(q) \equiv \sum_{s \in S} \frac{1}{W_{\hat{D}}(s.p)} \sum_{o \in \mathrm{Ngbr}_D(s)} \alpha_{o,s} F_o(q) \tag{21}$$

由于节点函数的深度越小，光滑滤波的带宽越大，上式可进一步修改为

$$\vec{V}(q) \equiv \sum_{s \in S} \frac{1}{W_{\hat{D}}(s.p)} \sum_{o \in \mathrm{Ngbr}_{\mathrm{Depth}(s.p)}(s)} \alpha_{o,s} F_o(q). \tag{22}$$

这里的 $\mathrm{Depth}(s.p)$ 表示采样点 $s \in S$ 的期望深度，它由 $s.p$ 处的密度与平均密度的相对值确定:

$$\mathrm{Depth}(s.p) \equiv \min\left(D, D + \log_4\left(W_{\hat{D}}(s.p)/W\right)\right) \tag{23}$$

最终提取表面时，使用指示函数的面积加权平均:

$$\partial \tilde{M} \equiv \left\{q \in \mathbb{R}^3 \mid \tilde{\chi}(q) = \gamma\right\} \quad \text{with} \quad \gamma = \frac{\sum \frac{1}{W_{\hat{D}}(s \cdot p)} \tilde{\chi}(s \cdot p)}{\sum \frac{1}{W_{\hat{D}}(s \cdot p)}} \tag{24}$$

3 重建总流程

3.1 点云数据

这里我们使用经典的 Bunny 模型进行实验，首先通过泊松圆盘采样得到 5000 个点的点云数据，然后添加均值为 0，标准差为 0.001 的高斯噪声，作为重建流程的输入点云，如图 3所示。

3.2 点云处理

3.3 体素网格采样

体素网格下采样是将空间分成一个个边长为 r 的立方体网格，然后将每个网格中的点云取平均值，作为下采样点云。具体流程如下：

1. 计算点集 $\{p_1, p_2, \cdots p_N\}$ 的边界

$$x_{\max} = \max\left(x_1, x_2, \cdots, x_N\right), \quad x_{\min} = \min\left(x_1, x_2, \cdots, x_N\right), \quad y_{\max} = \cdots\cdots$$

2. 根据点集的范围划分体素网格的尺寸 r

3. 计算体素网格的维数

$$\begin{aligned} D_x &= \left(x_{\max} - x_{\min}\right)/r \\ D_y &= \left(y_{\max} - y_{\min}\right)/r \\ D_z &= \left(z_{\max} - z_{\min}\right)/r \end{aligned}$$

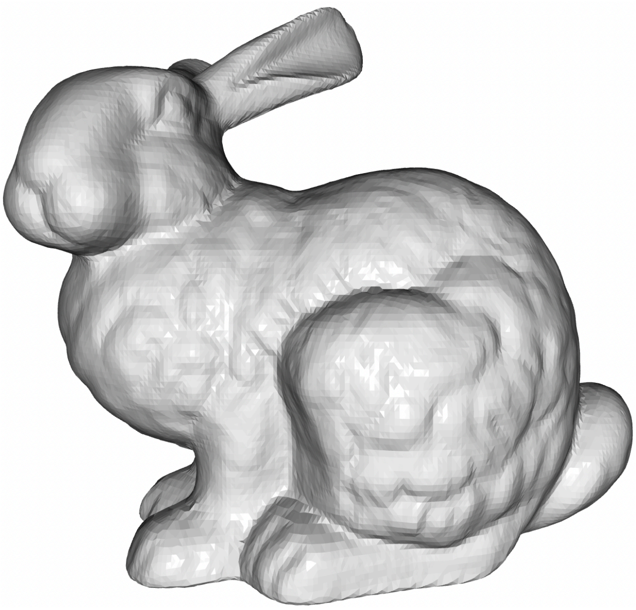
4. 计算每个点所属网格的编号

$$\begin{aligned} h_x &= \lfloor\left(x - x_{\min}\right)/r\rfloor \\ h_y &= \lfloor\left(y - y_{\min}\right)/r\rfloor \\ h_z &= \lfloor\left(z - z_{\min}\right)/r\rfloor \\ h &= h_x + h_y * D_x + h_z * D_x * D_y \end{aligned}$$

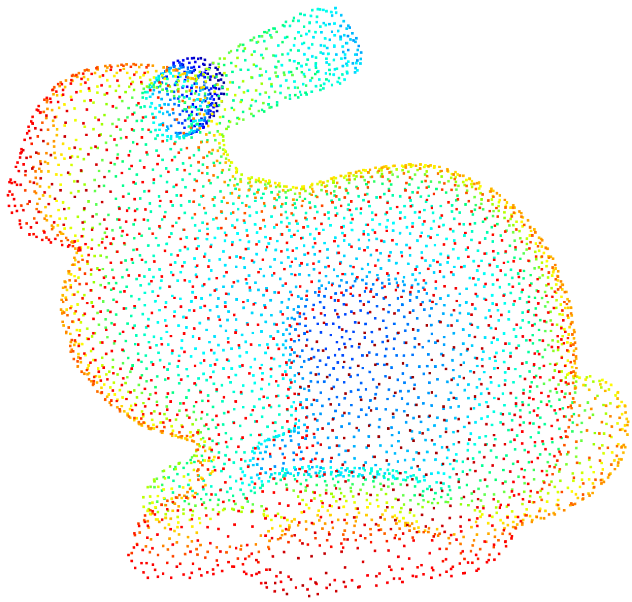
5. 根据步骤 4 中的索引对点进行排序

6. 遍历所有点，对同一网格中的点取平均，得到下采样点云

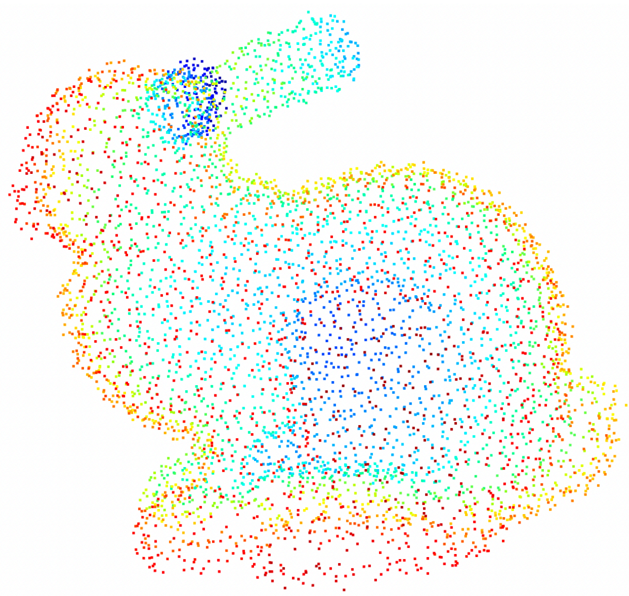
在点云数量非常多的情况下，$O(n\log n)$ 时间复杂度的排序也需要消耗不少时间，此时可以通过哈希映射的方法进行非精确的近似下采样。



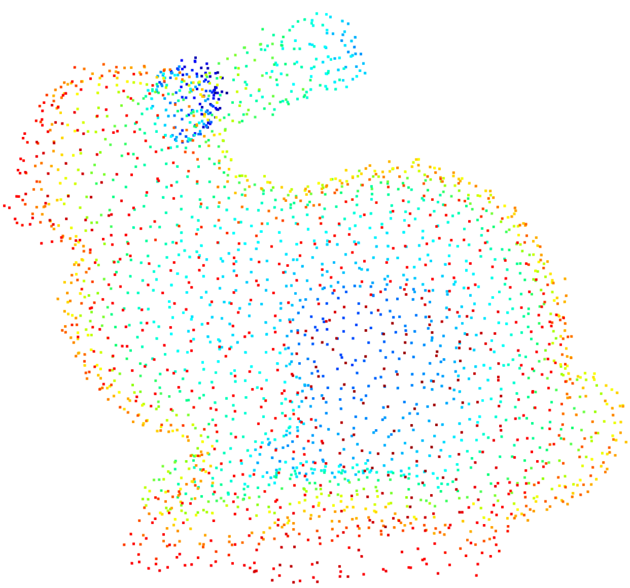
(a) Bunny 模型



(b) 泊松圆盘采样点云



(c) 噪声点云



(d) 体素下采样点云

图 3: 点云数据的准备与处理

3.4 去除离群点

常见的去除离群点的方法有两种，一种是基于半径的，另一种方法是基于统计的。

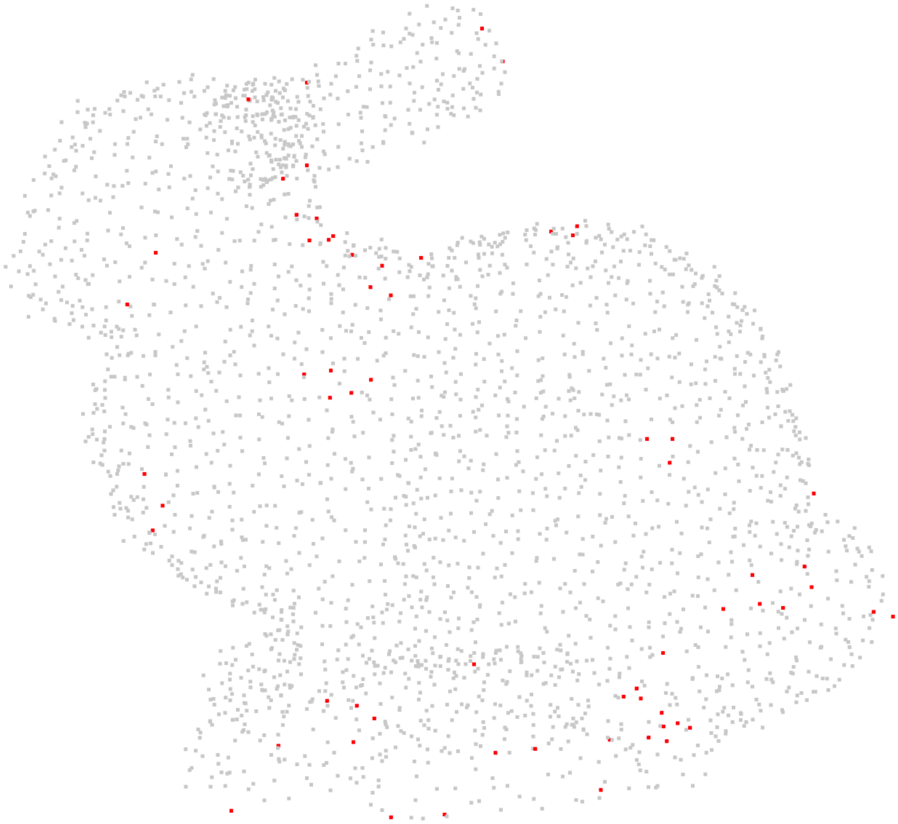


图 4: 这里的灰点为内点，红点为算法判定的离群点

Radius Outlier Removal

1. 对于每个点，找到 r 半径内的邻居点
2. 统计邻居点个数 k，如果 $k < k^*$，那么认为是离群点

这种方法的缺陷是需要给定三个参数 r, k 和 k^*。

Statistical Outlier Removal

1. 对于每个点 i，划分一个邻域，找到邻域内的邻居点
2. 计算到所有邻居点 j 的距离 d_{ij}

3. 假设距离服从高斯分布 $d \sim N(\mu, \sigma)$ 进行建模，计算参数

$$\mu = \frac{1}{nk} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} d_{ij}$$

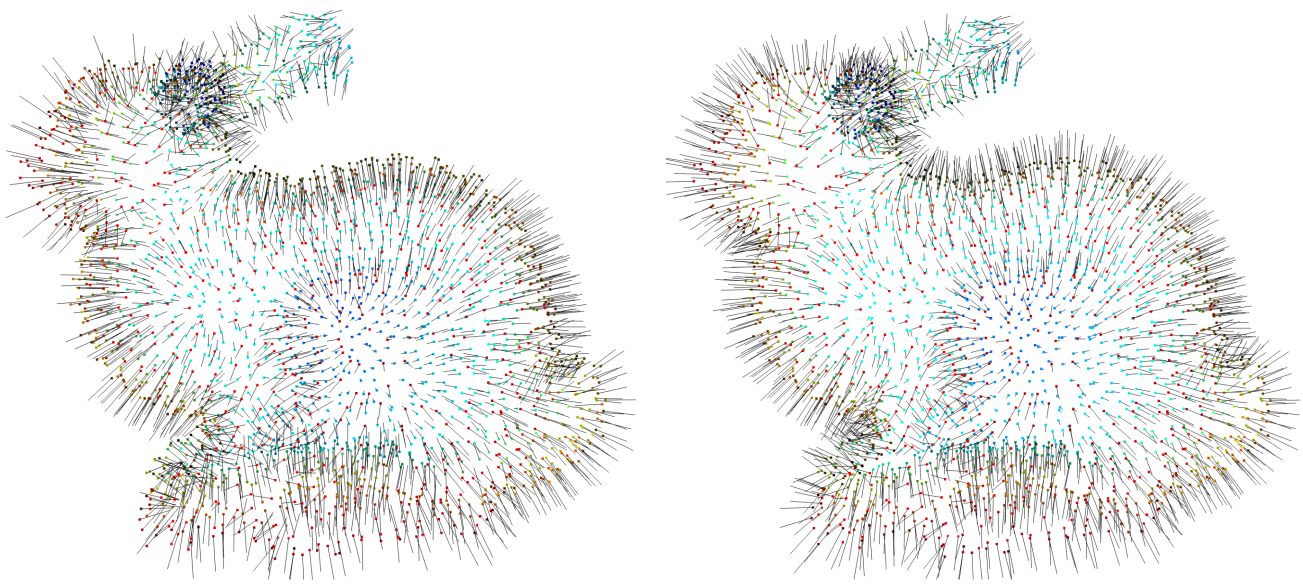
$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{nk} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} \left(d_{ij} - \mu\right)^2}$$

4. 如果 $\mu - 3\sigma < d_i < \mu + 3\sigma$，那么认为属于正常点，否则就是离群点

这个比基于噪声的方法更实用，只需确定合适的 k 即可，这里我们使用基于统计的方法去除离群点，效果如图 4所示：

3.5 法向估计

由于泊松重建需要点云的法向信息，因此我们还需要对点云的法向进行估计。



(a) 法线估计

(b) 法线定向

图 5: 可以看到，定向后的法向具有更好的一致性

3.5.1 PCA 法线估计

法线估计一般使用 PCA 算法：先建立 k-d 树，对于给定的点 $x_i \in \mathbb{R}^3$，可以快速找到最近的 k 个邻居点组成 $X = [x_1, x_2, \cdots x_k] \in \mathbb{R}^{3\times k}$，显然，这些点在法向量方向上投影的方差最小，因此我们可以用协方差矩阵 $XX^\top$ 的最小特征值所对应的特征向量来作为法向量的估计。

3.5.2 法线定向

用 PCA 估计出法线后，这里的法线是没有方向的，我们需要对法线进行重新定向，使得法线全部朝外。这里一般使用法向传播算法：

1. 将点云中每个点 p_i 作为图的顶点，将图的边的权重赋值为 $w_{ij} = 1 - |\boldsymbol{n}_i \cdot \boldsymbol{n}_j|$，其中 $\boldsymbol{n}_i, \boldsymbol{n}_j$ 分别 (p_i, p_j) 对应的法向，这样就构成了一张黎曼图；
2. 计算黎曼图的最小生成树;
3. 将该黎曼图的关联顶点作为起始点，并以该点法向方向为参考法向，遍历黎曼图最小生成树并进行法向传播。若 $\boldsymbol{n}_i \cdot \boldsymbol{n}_j < 0$，则对法向进行翻转。

其效果如图 5所示。

3.6 泊松重建

由于泊松重建的代码实现非常复杂，因此我们这里选择直接调用 Open3D 中内置的泊松重建函数 `create_from_point_cloud_poisson()`，其重建效果如图 6所示。

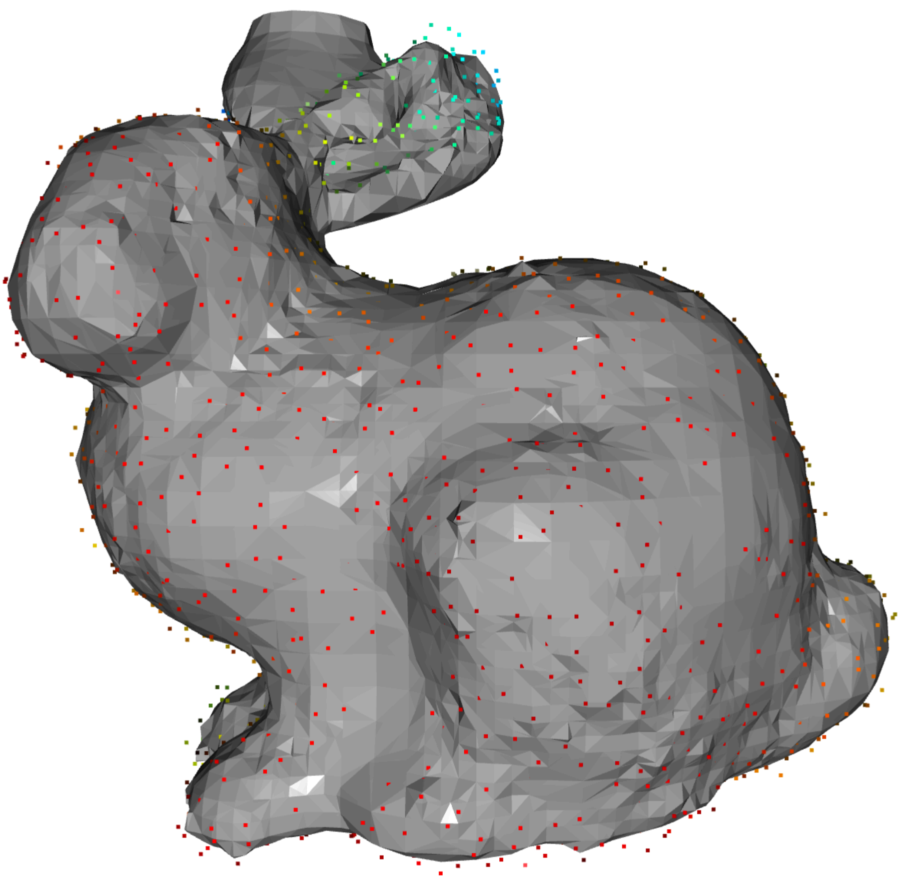
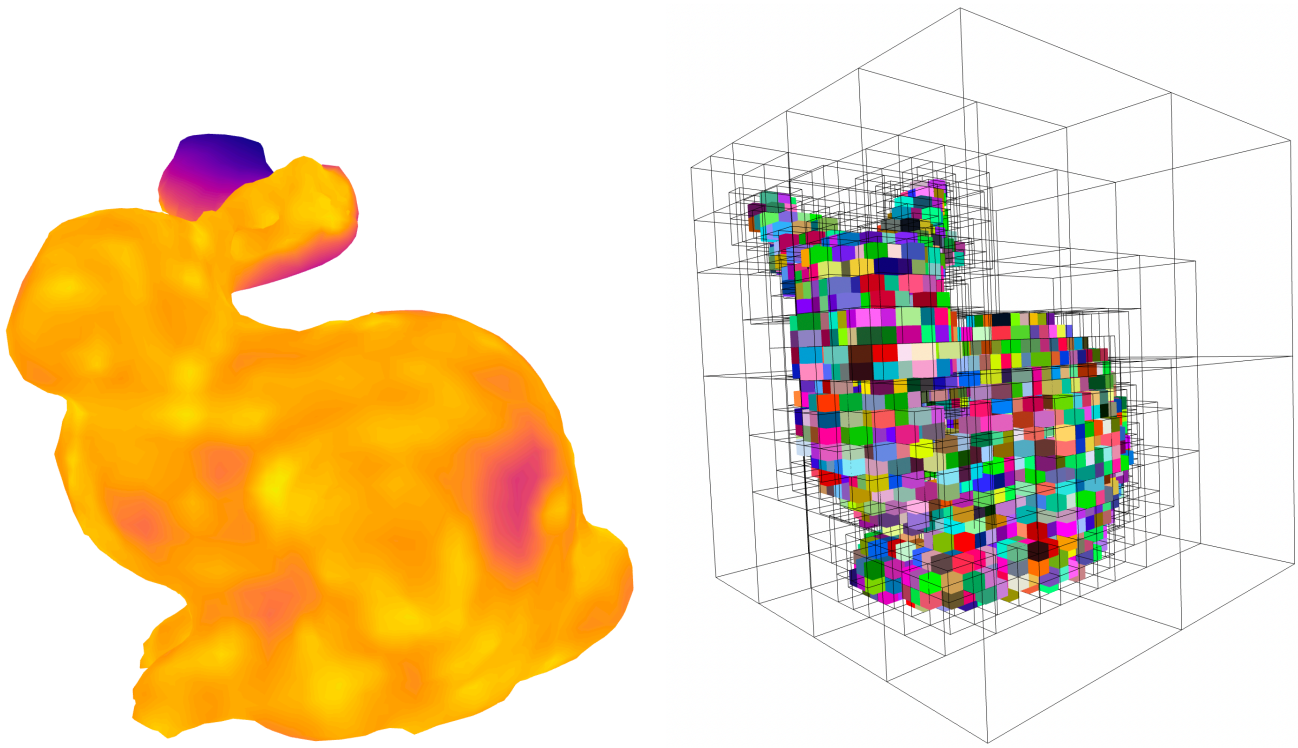


图 6: 泊松重建得到的网格曲面，彩色的点为泊松重建的输入点云

对于非均匀分布的点云，泊松重建算法还会计算每个点的密度作为自适应权重，这里我们将密度也可视化出来，可以看到兔子的右耳处密度较低，该区域的重建效果也相对差一些。此外，泊松重建使用了自适应八叉树数据结构，这里我们也将其进行了简单的可视化，如图 7所示。



(a) 密度可视化　　(b) 自适应八叉树

图 7: 图 (a) 中紫色表示低密度，黄色表示高密度；图 (b) 中演示的八叉树最大深度为 5，而在泊松重建中我们使用的最大深度为 8。

A Equation (6)的证明

Proof of Equation (6). 我们先计算 $\left(\chi_M * \tilde{F}\right)$ 关于 x 坐标分量的导数，得到：

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_{q_0}\left(\chi_M * \tilde{F}\right) &= \left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_{q=q_0}\int_M \tilde{F}(q-p)\mathrm{d}p \\
&= \int_M \left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_{q=q_0}\tilde{F}(q-p)\mathrm{d}p \\
&= \int_M \left(-\frac{\partial}{\partial x}\tilde{F}\left(q_0-p\right)\right)\mathrm{d}p \\
&= -\int_M \nabla\cdot\left(\tilde{F}\left(q_0-p\right),0,0\right)\mathrm{d}p \\
&= \int_{\partial M}\left\langle\left(\tilde{F}_p\left(q_0\right),0,0\right),\vec{N}_{\partial M}(p)\right\rangle\mathrm{d}p.
\end{aligned} \tag{25}$$

这里最后一步使用了散度定理

$$\int_M \nabla\cdot\vec{G}\mathrm{d}p = \int_{\partial M}\left\langle\vec{G},\vec{N}_{\partial M}(p)\right\rangle\mathrm{d}p \tag{26}$$

同理，可以计算出关于 y 和 z 坐标分量的导数，得到：

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_{q_0}\left(\chi_M * \tilde{F}\right) &= \int_{\partial M}\left\langle\left(0,\tilde{F}_p\left(q_0\right),0\right),\vec{N}_{\partial M}(p)\right\rangle\mathrm{d}p \\
\left.\frac{\partial}{\partial z}\right|_{q_0}\left(\chi_M * \tilde{F}\right) &= \int_{\partial M}\left\langle\left(0,0,\tilde{F}_p\left(q_0\right)\right),\vec{N}_{\partial M}(p)\right\rangle\mathrm{d}p
\end{aligned} \tag{27}$$

将上述三个方程组合起来，得到：

$$\nabla\left(\chi_M * \tilde{F}\right)\left(q_0\right) = \int_{\partial M}\tilde{F}_p\left(q_0\right)\vec{N}_{\partial M}(p)\mathrm{d}p \tag{28}$$

□